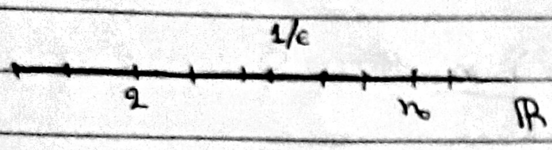
Παράδειγμα: $a_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$

ν.δ.ο. $\lim a_n = 0$

Θ.δ.ο. $\forall \epsilon > 0, \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : |a_n - 0| < \epsilon \quad \forall n \geq n_0$

Έστω $\epsilon > 0$, Άρα $\frac{1}{\epsilon} > 0$ ⇝ Από αξίωμα Αρχιμήδη-Ευδόξου
$\exists n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $n_0 > \frac{1}{\epsilon}$

[Αξίωμα Αρχιμήδη-Ευδόξου: Αν έχω δύο ευθύγραμμα τμήματα
ℓ L $\exists N \in \mathbb{N}$ τ.ω. $N \cdot \ell > L$]



Παρατηρούμε ότι για $n \geq n_0$: $|a_n - 0| = |a_n| = a_n = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \epsilon$

Πρόταση: Αν (a_n) είναι μια μηδενική ακολουθία (δηλ. τείνει στο μηδέν) και (b_n) μια φραγμένη, τότε $(a_n b_n)$ είναι μηδενική.

Απόδειξη

(b_n) φραγμένη άρα είναι και απόλυτα φραγμένη ⇝ $\exists \Theta > 0$ τέτοιο ώστε $|b_n| \leq \Theta$, $n \in \mathbb{N}$

Έστω $\epsilon > 0$

Αφού $a_n \to 0$ από ορισμό ορίου για $E = \frac{\epsilon}{\Theta}$

⇝ $\exists n_0$: $\boxed{|a_n - 0| < \frac{\epsilon}{\Theta}}$ (*) $n \geq n_0$

$\forall \epsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : |a_n - 0| < E \ \ \forall n \geq n_0$

Έστω $\epsilon > 0$ Άρα $\frac{1}{\epsilon} > 0$.

Άρα για $n \geq n_0$: $|a_n b_n - 0| \leq \Theta |a_n| < \cancel{\Theta} \frac{\epsilon}{\cancel{\Theta}} = \epsilon$

⇝ $a_n b_n \to 0$

Παράδειγμα: Να δειχθεί ότι $\frac{(-1)^n}{n} \to 0$

Θέτω $a_n = \frac{1}{n}$ και $b_n = (-1)^n$

Ξέρω ότι $a_n \to 0$

$|b_n| = |(-1)^n| = 1 \ (= \theta)$ $\rightsquigarrow$ b_n απόλυτα φραγμένη

Άρα το $|a_n b_n|$ είναι μηδενική ακολουθία από προηγούμενη πρόταση

Παράδειγμα: Ν.δ.ο. $\frac{\cos(n^2)\cdot n}{n^2+1} \longrightarrow 0$

Θέτω $a_n = \frac{n}{n^2+1}$ και $b_n = \cos(n^2)$

Άρα $|b_n| = |\cos(n^2)| \le 1$, $n \in \mathbb{N}$
Έχω (b_n) φραγμένη

Ξέρω $\frac{1}{n} \to 0$

$\frac{n}{n^2+1} = \frac{1}{n} \cdot \frac{n}{n^2+1}$ (συνέχεια στο σπίτι)

Πρόταση: Έστω $(a_n), (b_n), (c_n)$ ακολουθίες με $b_n \le a_n \le c_n \ \forall n \ge n_1$ (*)
Εάν $\lim b_n = \ell$ και $\lim c_n = \ell$ τότε $\lim a_n = \ell$.
Απόδειξη
Έστω $\epsilon > 0$. Αφού $b_n \to \ell$, $\exists n_2 : |b_n - \ell| < \epsilon \ \forall n \ge n_2$
$\rightsquigarrow -\epsilon < b_n - \ell < \epsilon$, $n \ge n_2$ (1)
Αφού $c_n \to \ell$, $\exists n_3 : |c_n - \ell| < \epsilon \ \forall n \ge n_3$
$\sim \ell - \epsilon < c_n < \ell + \epsilon$, $n \ge n_3$ (2)
Θέτω $n_0 = \max\{n_1, n_2, n_3\}$

Τότε για $n \ge n_0$, οι (*), (1), (2) ισχύουν ταυτόχρονα

$$\ell-\epsilon \overset{(1)}{<} \underbrace{b_n \le a_n \le c_n}_{(*)} \overset{(2)}{<} \ell+\epsilon \quad \forall n \ge n_0$$

Θέλω να φράξω από πάνω και από κάτω την $a_n-\ell$.

$\ell-\epsilon < a_n < \ell+\epsilon$

$-\epsilon < a_n-\ell < \epsilon \quad \to \quad |a_n-\ell|<\epsilon,\ n \ge n_0 \Leftrightarrow$

$\to a_n \to \ell$

ΟΡΙΟ ΚΑΙ ΔΙΑΤΑΞΗ

Λήμμα

Έστω $\lim a_n = \ell \ne 0$

Τότε $\exists n_0 \in \mathbb{N}: \ \frac{|\ell|}{2} < |a_n| < \frac{3}{2}|\ell|, \ n \ge n_0$

Απόδειξη

Αφού $\lim a_n = \ell \to \lim |a_n| = |\ell|$

$\forall \epsilon>0, \ \exists n_0: \ \big||a_n|-|\ell|\big| < \epsilon \quad n \ge n_0$

Επιλέγω $\epsilon = \frac{|\ell|}{2} > 0 \quad (\ell \ne 0)$

$\to \big||a_n|-|\ell|\big| < \frac{|\ell|}{2} \quad n \ge n_0$

Αναπτύσσοντας τη σχέση προκύπτει το ζητούμενο.

Πρόταση: Έστω $\lim a_n = \ell$. Αν $\ell > 0$ $(\ell<0)$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω. $a_n>0$ $(a_n<0)$ $\forall n \ge n_0$

Απόδειξη

Αφού $l>0$ θεωρώ $\epsilon = \frac{l}{2} > 0$ στον ορισμό του $\lim a_n = l$.

$\rightsquigarrow \exists n_0 : |a_n - l| < \frac{l}{2} \quad \forall n \geq n_0$

$\rightsquigarrow \exists n_0 : 0 < \frac{l}{2} < a_n < \frac{3l}{2} \quad \forall n \geq n_0$

$\rightsquigarrow$ Αφού $l>0 \Rightarrow a_n > 0$, $n \geq n_0$.

Αν $l<0$ θα εφαρμόσω για $\epsilon = -\frac{l}{2}$

Πρόταση 2: Έστω $\lim a_n = l$ και $\overbrace{a_n \geq 0 \quad \forall n \geq n_1}^{(1)}$. Τότε $l \geq 0$

(αντίστοιχα αν $a_n \leq 0$, $n \geq n_1 \rightsquigarrow l \leq 0$)

Απόδειξη (Με άτοπο)

Έστω ότι $l<0$

Από προηγούμενη πρόταση αφού $\lim a_n = l < 0$.

$\rightsquigarrow a_n < 0 \quad n \geq n_0 \quad (2)$

Θέτουμε $n_2 = \max\{n_0, n_1\}$

Για $n \geq n_2$, ισχύουν (1) και (2) ταυτόχρονα. Άρα άτοπο